

Appunti sui grafi clique iterati

Marco Liverani*

Novembre 2005

1 Introduzione

Un grafo (o il sottografo di un grafo assegnato) si dice *completo* se tutti i suoi vertici sono a due a due adiacenti. Se un sottografo C di un grafo G gode di una determinata proprietà, diremo che è *massimale* per tale proprietà se non è contenuto propriamente in nessun altro sottografo di G che goda della stessa proprietà. Possiamo quindi definire una **clique** C di un grafo $G = (V, E)$ come un sottografo completo massimale di G .

Dato un grafo $G = (V, E)$ e una famiglia $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ di sottografi di G , possiamo definire il *grafo intersezione* G' di \mathcal{C} , ponendo $V(G') = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ e $E(G') = \{(C_i, C_j) : V(C_i) \cap V(C_j) \neq \emptyset\}$.

Definiamo il **grafo clique** di G come il grafo intersezione delle *clique* di G e lo indicheremo con $K(G)$.

Ad esempio il grafo clique di K_n è il grafo banale costituito da un solo vertice. Il grafo clique di un ciclo C_4 è lo stesso C_4 . In Figura 1 è rappresentato un Hajos graph H ed il suo grafo clique K_4 .

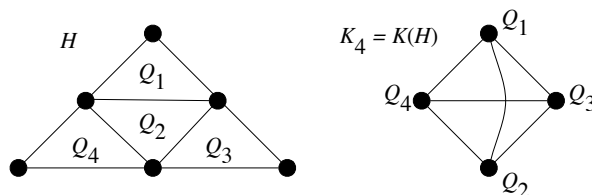


Figura 1: Hajos graph e il suo grafo clique K_4

È interessante studiare il problema “inverso”: dato un grafo H verificare se esiste un grafo G di cui H è il grafo clique, ossia se $H = K(G)$ per qualche G . Il problema non è banale, visto che ad esempio si può dimostrare che per il grafo Hajos esteso H' rappresentato in Figura 2 non esiste alcun grafo G tale che $K(G) = H'$.

*E-mail: liverani@mat.uniroma3.it; ultima revisione: 17 novembre 2005.

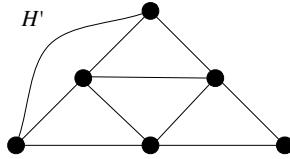


Figura 2: Hajos graph esteso H'

La costruzione dei grafi clique è un problema assai complesso: costruire il grafo $K(G)$ per un grafo G generico è un problema NP-completo. Infatti, dato un grafo G ed una costante $k > 0$, il problema di decisione che chiede di verificare se G contiene una clique di dimensione pari a k è un problema NP-completo (CLIQUE). Un grafo si dice **clique completo** se tutte le sue clique si intersecano a coppie. Stabilire se un grafo non è clique-completo è un altro problema NP-completo (si dimostra per riduzione da CNF-SAT).

Possiamo definire il **grafo clique iterato** $K^p(G)$ ponendo:

$$K^p(G) = \begin{cases} K(G) & \text{se } p = 1 \\ K(K^{p-1}(G)) & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

È interessante studiare come si comporta un determinato grafo G sottoposto all'azione iterata dell'operatore clique; in altri termini siamo interessati a conoscere se reiterando l'applicazione dell'operatore clique su G , il numero di vertici è divergente, è convergente a uno o se si mantiene stabile. In termini più precisi possiamo enunciare le seguenti definizioni:

- G è **K -periodico** se $K^n(G) \cong G$ per qualche $n > 0$ (si dice che G è *self clique* se $n = 1$);
- G è **K -convergente** se $K^n(G) \cong K^m(G)$ per qualche $n, m > 0$ tali che $n < m$;
- G è **K -nullo** se $K^n(G) \cong K_1$ per qualche $n \geq 0$;
- G è **K -divergente** se $\lim_{n \rightarrow \infty} |V(K^n(G))| = \infty$.

Le classi che abbiamo definito non sono banali, infatti è facile verificare che il grafo Hajos è K -nullo e che il ciclo C_4 è K -periodico (anzi, self clique; vedi Figura 3). Neumann-Lara ha dimostrato per primo che l'ottaedro n -dimensionale $O_n \cong \underbrace{K_{2,2,\dots,2}}_n$ è K -divergente: $K(O_n) \cong O_{2n-1}$.

Studiare il K -comportamento di un grafo G generico è un problema di cui non è nota la complessità (probabilmente il problema decisionale che chiede di stabilire se un grafo G è K -divergente è indecidibile). Tuttavia ci si può applicare allo studio del comportamento di specifiche classi di grafi che possiamo caratterizzare completamente.

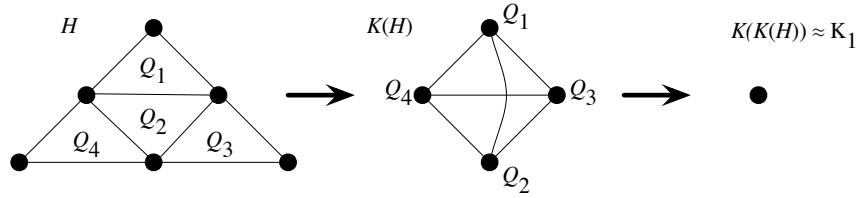


Figura 3: Processo di K -convergenza a K_1 del grafo di Hajos

2 Caratterizzazione della classe dei grafi clique-Helly

Un grafo gode della proprietà **clique-Helly** (è clique-Helly) se ogni sottoinsieme di clique di G che si intersecano a coppie ha intersezione totale non vuota.

Ad esempio il grafo *wheel* W_5 rappresentato in Figura 4 è clique-Helly, mentre il grafo di Hajos non lo è: le sue clique si intersecano tutte a coppie, ma l'intersezione di tutte le clique di H è vuota.

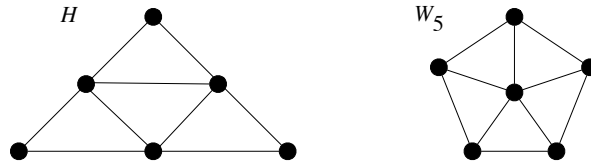


Figura 4: Un grafo clique-Helly (W_5) ed un grafo che non è clique-Helly (H)

È facile mostrare che ogni grafo G connesso privo di triangoli è clique-Helly (condizione necessaria). Le clique di G sono in tal caso i suoi spigoli, dunque ogni insieme di spigoli a due a due incidenti, se non è un triangolo è una stella e dunque contiene un vertice comune a tutti gli spigoli dell'insieme.

Teorema 1 *La classe dei grafi clique-Helly è chiusa rispetto all'operatore clique: se G è clique-Helly, allora anche $K(G)$ lo è.*

Dato un sottografo G' di G ed un vertice $v \in V(G')$, si dice che v è **universale** in G' se è adiacente ad ogni altro vertice di G' . Dato un grafo G ed un triangolo T di G (un sottografo K_3), si definisce il **triangolo esteso** T' di T , come il sottografo di G indotto da tutti i vertici che sono adiacenti almeno a due vertici di T .

Teorema 2 *G è clique-Helly se e solo se ogni triangolo esteso di G contiene un vertice universale.*

Teorema 3 *Se G è clique-Helly allora G è K -convergente (condizione necessaria).*

È dunque molto rilevante poter riconoscere se un determinato grafo G gode o meno della proprietà clique-Helly. A tal fine possiamo formulare l'Algoritmo 1 per il riconoscimento di grafi clique-Helly in tempo polinomiale.

Algoritmo 1 Riconoscimento di grafi clique-Helly

- 1: poni $flag = true$
 - 2: **per ogni** triangolo T in G se $flag = true$ **ripeti**
 - 3: costruisci il triangolo esteso T' di T
 - 4: **se** T' non ha un vertice universale **allora**
 - 5: $flag = false$
 - 6: **fine-condizione**
 - 7: **fine-ciclo**
 - 8: restituisci $flag$
-

Il numero di operazioni effettuate dall'algoritmo è polinomiale nel numero di triangoli presenti nel grafo (dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{6}n^3$). Inoltre sia l'algoritmo che l'osservazione fatta in precedenza, ci permette di stabilire molto rapidamente se un grafo è clique-Helly, verificando che non contenga triangoli (sottografi isomorfi a K_3).

3 Retrazione

Due grafi G e G' si dicono **isomorfi** se esiste una funzione biunivoca $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ tale che $(u, v) \in E(G)$ se e solo se $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$; in altri termini un isomorfismo φ manda vertici adiacenti in vertici adiacenti e dunque due grafi isomorfi hanno lo stesso numero di vertici e di spigoli. In questo caso si scrive $G \cong G'$.

Un **omomorfismo** è una funzione $\alpha : V(G) \rightarrow V(G')$ che manda vertici adiacenti di G in vertici di G' che coincidono o che sono adiacenti. Dunque se $(u, v) \in E(G)$ allora o $\alpha(u) = \alpha(v)$ oppure $(\alpha(u), \alpha(v)) \in E(G')$.

Un omomorfismo $\alpha : V(G) \rightarrow V(G')$ è una **retrazione** da G a G' se esiste un omomorfismo $\beta : V(G') \rightarrow V(G)$ tale che $\alpha\beta$ è l'identità. In tal caso si dice che G' è un **retrato** di G . Il seguente teorema stabilisce una relazione assai potente ed utile tra il concetto di retrazione e quello di grafo clique.

Teorema 4 Sia G' il retratto di un grafo G . Allora

1. $K(G')$ è il retratto di $K(G)$;
2. se G' è K -divergente allora anche G lo è.

Con questo teorema si può provare la K -divergenza di numerose classi di grafi costruendo una retrazione a grafi di cui sia noto il comportamento K -divergente. Ad esempio i grafi multipartiti completi K_{p_1, \dots, p_k} possono essere retratti a O_k , se $p_1, \dots, p_k \geq 2$ e $k > 2$; siccome O_k per $k > 2$ è K -divergente, allora anche i grafi K_{p_1, \dots, p_k} sono divergenti.

Un **automorfismo** α è un omomorfismo biunivoco da G in se stesso. Un automorfismo è *affine* se v e $\alpha(v)$ sono adiacenti per ogni $v \in V(G)$. Un **automorfismo coaffine** è un automorfismo per cui v e $\alpha(v)$ non sono né adiacenti né coincidenti.

Sia $G = (V, E)$ un grafo e $v \in V$ un vertice; indichiamo con $N[v]$ l'insieme dei vertici di G adiacenti a v (compreso lo stesso v). Un vertice v del grafo G è **dominato** dal vertice u se $N[v] \subseteq N[u]$. Sia G un grafo e G' un suo sottografo. Diremo che G è **smantellabile** in G' se esiste una sequenza v_1, \dots, v_k di vertici di G tali che, posto $G_0 = G$ e $G_k = G'$, si ha $G_i = G_{i-1} - \{v_i\}$ e v_i è dominato da qualche altro vertice in G_{i-1} . In pratica si "smantella" G rimuovendo uno ad uno i vertici dominati, fino ad ottenere G' .

Il seguente teorema ci fornisce una condizione molto forte che permette di studiare sia la K -divergenza che la K -convergenza di grafi, studiando il comportamento di grafi più piccoli, ottenuti per smantellamento.

Teorema 5 *Se G è smantellabile in G' , allora G e G' hanno lo stesso K -comportamento.*

4 Decomposizione modulare

Dati due grafi qualsiasi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, definiamo le seguenti operazioni:

- **Unione** (composizione parallela): $G = G_1 \cup G_2$ è dato da $V(G) = V_1 \cup V_2$, $E(G) = E_1 \cup E_2$;
- **Somma** (composizione seriale): $G = G_1 + G_2$ è dato da $V(G) = V_1 \cup V_2$, $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \times V_2)$;
- **Prodotto cartesiano**: $G = G_1 \times G_2$ è dato da $V(G) = V_1 \times V_2$ e $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in E(G)$ se e solo se $(u_1, v_1) \in E_1$ e $(u_2, v_2) \in E_2$.

Teorema 6 *Siano G_1 e G_2 due grafi con insiemi di vertici distinti. Risultano verificate le seguenti identità:*

1. $K(G_1 \cup G_2) = K(G_1) \cup K(G_2)$.
2. $\overline{K(G_1 + G_2)} = \overline{K(G_1)} \times \overline{K(G_2)}$.

Un **modulo** di un grafo G è un sottoinsieme M di $V(G)$ tale che tutti i vertici di M sono adiacenti agli stessi vertici di $V(G) - M$; in altre parole se M è un modulo, allora ogni vertice $v \in V(G) - M$ è adiacente a tutti i vertici di M o a nessuno di essi.

Un modulo M si dice **forte** se per ogni altro modulo A dello stesso grafo risulta $M \cap A = \emptyset$ oppure $M \cap A = M$ o $M \cap A = A$. Ad esempio nel grafo in Figura 5 gli unici moduli non banali sono costituiti dagli insiemi di vertici $\{1, 3\}$ e $\{2, 4\}$; nessuno dei due moduli è di tipo forte.

In un grafo non connesso G i moduli forti massimali sono le componenti connesse G_1, \dots, G_p del grafo. In tal caso risulta $G = G_1 \cup \dots \cup G_p$ e il grafo G si dice **parallelo**. I moduli, i moduli forti e i moduli forti massimali sono gli stessi di \overline{G} , quindi

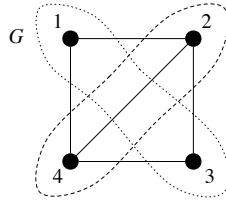


Figura 5: Un grafo G con due moduli

se \overline{G} non è connesso i moduli forti massimali di G sono le componenti connesse G_1, \dots, G_p di \overline{G} . In questo caso risulta $G = G_1 + \dots + G_p$ e il grafo G si dice **seriale**.

Possiamo distinguere tre tipi di moduli M in un grafo G :

- M è un **modulo parallelo** se il sottografo di G indotto da M , $G[M]$, non è connesso;
- M è un **modulo seriale** se il complemento del sottografo di G indotto da M , $\overline{G[M]}$, non è connesso;
- M è un **modulo neighborhood** se sia $G[M]$ che $\overline{G[M]}$ sono connessi.

Utilizzando le operazioni di somma e unione e sfruttando le definizioni di modulo appena proposte, possiamo costruire un **albero di decomposizione modulare** di un grafo, suddividendolo iterativamente in moduli seriali, paralleli e *neighborhood*. La radice dell'albero è il grafo originale, i nodi intermedi sono i moduli della decomposizione (seriali, paralleli o neighborhood) e le foglie sono i singoli vertici del grafo. In Figura 6 è riportato un esempio di decomposizione modulare per il grafo multipartito completo $K_{3,2,2}$.

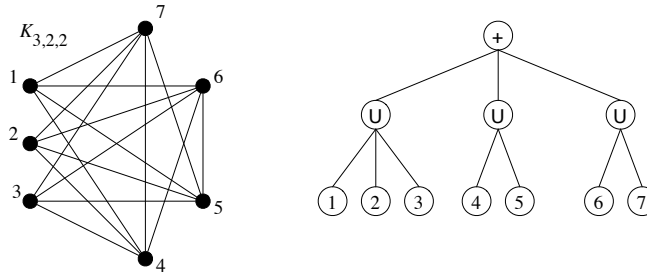


Figura 6: Il grafo $K_{3,2,2}$ ed il suo albero di decomposizione modulare

Costruendo la decomposizione modulare di un grafo ed applicando il risultato proposto dal Teorema 6 si ottiene uno strumento molto efficace per studiare il K -comportamento di grafi. In particolare per i grafi seriali parallelamente decomponibili possiamo formulare un algoritmo assai semplice per la costruzione dell'albero

di decomposizione modulare. Le componenti connesse di un grafo non orientato possono essere costruite molto facilmente utilizzando un semplice algoritmo di visita in profondità.

Algoritmo 2 Decomposizione di grafi seriali parallelamente decomponibili

DecomposizioneModulare(G)

```

1: se  $|V(G)| > 1$  allora
2:   siano  $C_1, \dots, C_k$  le componenti connesse di  $G$ 
3:   se  $k = 1$  allora
4:     siano  $C_1, \dots, C_k$  le componenti connesse di  $\overline{G}$ 
5:     stampa i moduli seriali  $C_1, \dots, C_k$ 
6:   altrimenti
7:     stampa i moduli paralleli  $C_1, \dots, C_k$ 
8:   fine-condizione
9:   per  $i = 1, 2, \dots, k$  ripeti
10:    DecomposizioneModulare( $G[C_i]$ )
11:  fine-ciclo
12: altrimenti
13:   stampa il modulo  $V(G) = \{v\}$ 
14: fine-condizione

```

Per quanto riguarda la classe dei grafi seriali (decomponibili in moduli seriali) e dei grafi seriali parallelamente decomponibili (grafi che possono essere decomposti in moduli seriali che a loro volta si decompongono in moduli paralleli), valgono i seguenti risultati.

Teorema 7 Sia $G = G_1 + \dots + G_k$ un grafo seriale. G è clique-Helly se e solo se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:

1. G è un cono (G contiene un vertice universale);
2. $k = 2$ e tutte le componenti connesse di G_1 e G_2 sono coni.

Teorema 8 Sia G un grafo seriale parallelamente decomponibile, con k componenti seriali. Se $k > 2$ allora G è K -divergente.

Teorema 9 Sia $G = G_1 + G_2$ un grafo seriale. Se esiste almeno un modulo M_j^i di G_1 o di G_2 che sia seriale parallelamente decomponibile, allora G è K -divergente.

5 Cografi

Un **cografo** è un grafo G privo di sottografi indotti isomorfi a P_4 (il cammino con 4 vertici e 3 spigoli). Il grafo P_4 ha la proprietà di essere il più piccolo grafo connesso isomorfo al proprio complementare: $P_4 \cong \overline{P_4}$. Dal momento che P_4 è connesso, la presenza di sottografi indotti isomorfi ad un P_4 in un grafo G implica l'impossibilità di compiere una decomposizione modulare priva di nodi neighborhood. La classe

dei cografi è interessante anche perché è chiusa rispetto all'operazione di complemento: se G è un cografo allora anche \overline{G} è un cografo. Inoltre la proprietà di essere cografo è ereditata da tutti i sottografi indotti di un cografo G .

Per i cografi l'albero di decomposizione modulare è unico ed è privo di nodi di tipo neighborhood. Tale albero di decomposizione si chiama *coalbero*. I cografi possono essere infatti definiti ricorsivamente come segue:

1. K_1 è un cografo;
2. se G_1, \dots, G_k sono cografi, allora anche $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$ è un cografo;
3. se G è un cografo allora anche \overline{G} è un cografo.

I seguenti teoremi forniscono una caratterizzazione molto potente del K -comportamento dei cografi.

Teorema 10 *Un cografo G è K -divergente se e solo se entrambe le seguenti condizioni sono verificate:*

1. G non è un cono;
2. le componenti seriali di G sono almeno tre, oppure, se sono esattamente due allora almeno un modulo di una delle componenti seriali non è un cono.

Teorema 11 *Un cografo è K -convergente se e solo se è clique-Helly.*

Esiste un algoritmo di complessità polinomiale per riconoscere se un determinato grafo è un cografo.

Estendiamo la classe dei cografi. Sia G un grafo con un sottografo indotto isomorfo a P_4 ; un vertice v di G è un **partner** del P_4 se $v \notin V(P_4)$ e se è adiacente al primo o all'ultimo vertice del P_4 (o ad entrambi), ma non a tutti i vertici del P_4 . Un grafo G è P_4 -**tidy** se ogni sottografo P_4 indotto di G ha al più un partner.

Un grafo G è un P_4 -**lite** se e solo se è un P_4 -tidy privo di moduli neighborhood isomorfi ad un ciclo C_5 .

G è P_4 -**estensibile** se e solo se ogni modulo neighborhood isomorfo ad uno spider o ad un fat spider è tale che $|Q| = 2$.

Un grafo G è P_4 -**sparso** se e solo se G non ha moduli neighborhood isomorfi a P_5 o a $\overline{P_5}$ o a C_5 o a un fat spider.

Un grafo G è un P_4 -**sparso esteso** se e solo se non ha moduli neighborhood isomorfi a P_5 , a $\overline{P_5}$ o ad un fat spider.

Infine G è un grafo P_4 -**riducibile** (o un P_4 -**riducibile esteso**) se è un P_4 -sparso (o un P_4 -sparso esteso) con $|Q| = 2$.

Le classi di grafi sopra definite sono caratterizzate dalle relazioni di inclusione descritte dal digramma rappresentato in Figura 7.

I seguenti teoremi caratterizzano il K -comportamento della classe dei grafi P_4 -tidy e delle sotto-classi da questa derivate. Un **N-retrato forte** di G è il grafo ottenuto eliminando iterativamente tutti i vertici dominati da ogni modulo neighborhood di G .

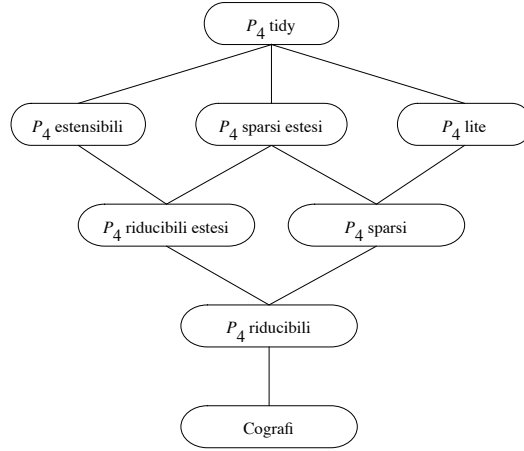


Figura 7: Relazioni di inclusione tra le classi che estendono i cografi

Teorema 12 Se G è P_4 -tidy, allora ogni modulo neighborhood della decomposizione modulare del N -retrato forte di G è isomorfo a G_5 .

Teorema 13 Un grafo P_4 -tidy connesso è K -convergente se e solo se il suo N -retrato forte è un grafo clique-Helly.

6 P-tree

Un grafo $G = (V, E)$ è p -connesso (o anche P_4 -connesso) se, per ogni bipartizione V_1, V_2 di V esiste un sottografo indotto isomorfo a P_4 che contiene vertici in V_1 e in V_2 . Le **componenti p -connesse** di G sono i sottografi indotti massimali p -connessi.

Una p -catena è una sequenza di vertici tale che ogni quattro vertici consecutivi inducono un sottografo isomorfo a P_4 . Una p -catena di $k \geq 4$ vertici è semplice se induce esattamente $k-3$ P_4 . In Figura 8 sono riportati alcuni grafi che sono p -catene semplici.

Altri esempi di p -catene semplici sono dati dai **grafi split** Q_k ($k \geq 5$) e i loro complementari \overline{Q}_k . G è un grafo split Q_k se è possibile partizionare l'insieme dei suoi vertici $V(Q_k) = \{v_1, \dots, v_k\}$ in due insiemi: un insieme completo $A = \{v_{2i-1}\}$ ed un insieme stabile $B = \{v_{2i}\}$. Gli spigoli che connettono le due componenti sono definiti come segue: $E(Q_k) = \{(v_{2i}, v_{2i-1}) \text{ e } (v_{2i}, v_{2j+1}) \text{ per } j > i\}$.

Si può dimostrare che ogni p -catena semplice è isomorfa ad uno dei grafi precedenti (P_k con $k \geq 4$, R_5 , R_6 , R_7 , Q_k e \overline{Q}_k con $k \geq 5$).

Un p -end-vertex è un vertice che appartiene ad un solo P_4 . Un p -tree è ottenuto da una p -catena semplice aggiungendo dei p -end-vertices che possono anche essere sostituiti con dei cografi. Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione dei p -tree.

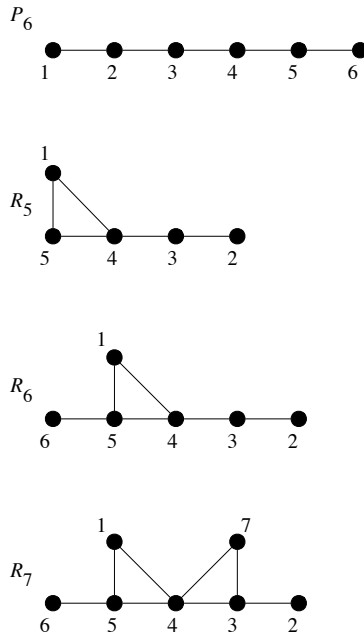


Figura 8: Alcune p -catene semplici: i grafi P_6 , R_5 , R_6 e R_7

Teorema 14 *Un grafo è un p -tree se e solo se è un P_4 con un vertice sostituito da un cografo, o una spiked p -chain con i p -end-vertices sostituiti da cografi.*

Attraverso i risultati forniti da un insieme di teoremi è possibile caratterizzare completamente il K -comportamento dei p -tree, che in moltissimi casi sono K -convergenti e K -nulli.

Riferimenti bibliografici

- [1] L. Babel, S. Olariu, *On the p -connectedness of graph – A survey*, Discrete Applied Mathematics, 99, 2000.
- [2] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad, *Graph Classes – A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [3] C. P. de Mello, A. Morgana, M. Liverani, *The clique operator on graphs with few P_4 's*, accepted by Discrete Applied Mathematics, 2005.
- [4] F. Larrión, C. P. de Mello, A. Morgana, V. Neumann-Lara, M. Pizaña, *The clique operator on cographs and serial graphs*, Discrete Mathematics, 282, 2004.

- [5] M. Liverani, A. Morgana, C. P. de Mello, *The K -behaviour of p -trees*, accepted by *Ars Combinatoria*, 2005.
- [6] E. Prisner, *Convergence of iterated clique graphs*, *Discrete Mathematics*, 103, 1992.
- [7] J. L. Szwarcfiter, *Recognizing clique-Helly graphs*, *Ars Combinatoria*, 45, 1997.
- [8] J. L. Szwarcfiter, *A Survey on Clique Graphs*, in *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics*, C. Linhares, B. Reed, eds., Springer-Verlag, 2003.