Le città invisibili

C'è problema e problema...

di Giuliano Spirito

Nel numero 10 di *Insegnare*, i lettori di questa rubrica venivano sollecitati a spedire testi di problemi "belli" su cui aprire un confronto e da cui trarre spunti per osservazioni e riflessioni "puntuali" sulla didattica quotidiana della matematica. In attesa di essere sommersi dalle proposte dei lettori, ci apprestiamo a dare il buon esempio.

Dunque, il problema che segue trova la sua collocazione naturale al termine della prima media o all'inizio della seconda, quando si affronta la tematica delle frazioni equivalenti, ma potrebbe essere utilmente affrontato e discusso in una classe qualsiasi dalla quinta elementare al primo anno della superiore:

*Una gita nel Paese dei matematici***.** *A volte, per evitare discussioni, all'entrata del negozio o dell'ufficio postale vengono distribuiti dei numeretti. Nel paese dei matematici, dove Giulia e Paolo sono in gita, usano molto questo sistema; purtroppo i numeretti che distribuiscono sono… frazioni! Ora, succede che a Giulia venga assegnato il numero 5/11 e a Paolo il numero 6/11. Per capire a che punto della fila toccherà a loro, i nostri due amici stanno ripassando mentalmente tutti i metodi per fare i confronti tra frazioni. Sono pieni di dubbi, ma di una cosa sono sicuri: subito dopo Giulia toccherà a Paolo; infatti, non può esserci nessuna frazione compresa tra 5/11 e 6/11! Ti chiediamo: a) Giulia e Paolo hanno ragione a pensare di essere in due posizioni immediatamente consecutive nella fila? b) se Giulia e Paolo hanno torto, quante persone al massimo possono stare in mezzo a loro nella fila?*

Prima di tutto un "controllo di qualità": avevamo definito un problema bello come un problema che fosse curioso, aperto a varie strategie risolutive, significativo e ricco di insegnamenti; ebbene, la nostra gita nel Paese dei matematici soddisfa queste condizioni? Ci sembra di poter dire di sì. Infatti il testo, che mescola concretezza e quotidianità con elementi vagamente surreali, si colloca in una dimensione consonante con quella dei nostri allievi. D'altra parte, la ricerca della soluzione si presta a una discussione, non essendoci una linea diritta e diretta che conduce alle risposte. E, infine, la problematica evocata è matematicamente ricca e significativa, giacché coinvolge temi di grande spessore e con risvolti "innaturali", atti a mettere in crisi un pensiero "pigro": in particolare, la densità – cioè l'esistenza di infinite frazioni tra due frazioni date – dell'insieme delle frazioni.

Stabilito, immodestamente, che si tratta di un problema "bello", restano da discutere le modalità con cui un problema come questo può intervenire nell'attività didattica. Ci sembra che la sua funzione possa essere quella di introdurre e aprire il discorso sulle caratteristiche dell'insieme dei razionali, messo a confronto con l'insieme dei naturali. Quindi una funzione di problema-stimolo che, per la sua forza suggestiva, possa divenire una pietra miliare ("ricordati della fila del Paese dei matematici...") nella costruzione successiva.

Ma la sua funzione, se presentato in una fase successiva (ad esempio nel primo anno della secondaria superiore), può essere anche quella di verificare se il modello di insieme ordinato denso costituito dai razionali sia stato introiettato in profondità, affiancandosi così al modello "forte", privilegiato e persistente costituito dall'ordinamento discreto dei naturali. Tra parentesi: quanto sia necessario un grande lavoro per evitare che il modello di progressione a salti dei naturali, il primo che si incontra, resti l'unico davvero presente nella mente dei ragazzi, è testimoniato dai tanti errori ricorrenti che rimandano al carattere pervasivo del modello-naturali. Si pensi all'idea che la moltiplicazione sia connessa sempre a un aumento e la divisione a una diminuzione (con conseguente sorpresa quando si scopre che 10×0,5 è uguale a 5 e che 10:0,5=20) o, ancora, alla tesi che 5,6 sia minore di 5,58, idea e tesi che conseguono dal pensare in termini di naturali anche quando l'ambiente numerico è più ampio.
Ed ecco che abbiamo trovato un ulteriore motivo di interesse nel problema proposto: esso costituisce l'occasione per una riflessione nostra, degli insegnanti, su alcuni nodi nel percorso di apprendimento, in particolare sulla perversa pervasività del modello numerico costituito dai naturali. Più di questo, che cosa si può chiedere a un problema?

P.S. Forse, però, il modo migliore per apprezzare il problema proposto sarebbe quello di affiancarlo ad alcuni problemi sulle frazioni che troviamo nei manuali più usati, problemi (e manuali) a cui si adatta, a nostro avviso, lo slogan di una nota campagna pubblicitaria: se li conosci, li eviti (purtroppo, a volte, li conosciamo così bene da evitare, per pigrizia, di evitarli!). Proponiamo quindi ai lettori di arricchire la nostra ricerca: accanto ai problemi "belli", perché non segnalare e commentare anche quelli francamente, definitivamente, irrimediabilmente "brutti", così ampiamente presenti nella tradizione didattica?

Le città invisibili

Caro colonnello...

di Giuliano Spirito

Ormai insperata, giunse infine una lettera (una lunga lettera) al colonnello!

"Caro Giuliano o, se preferisci, caro colonnello – scrive la collega Sandra Vannini, insegnante di scuola media a Sesto Fiorentino – [...] ho proposto nella mia seconda media il problema della fila nell'ufficio postale del paese dei matematici (n. 12-2001 di *Insegnare*) con il quesito se tra Giulia (numero 5/11 della fila) e Paolo (numero 6/11 della fila) ci potesse essere qualcuno; il quesito, leggermente modificato, è stato da me ambientato in un negozio di giochi, il più grande del mondo (si sa che i matematici adorano il gioco!). Ti riporto un po' della discussione avvenuta:

Matteo: – È vero che passa prima Giulia, ma Paolo non entra subito dopo... non so dire perché!

Samuele: – Tra Giulia e Paolo ci sono 10 persone, cioè 10 frazioni, ... ma non so quali ....

Camilla – Non è possibile che siano 10... se ce n'è anche una sola, allora ce ne sono infinite... ma non so...

Elena: – Non mi riesce "vedere" le frazioni "dentro" a 5/11 e 6/11... Un momento! Si potrebbero prendere altre frazioni equivalenti...

Camilla: – Cioè 10/22 e 12/22... sicuramente nel mezzo c'è 11/22!

Elena: – Allora per trovarne altre basta trovare altre frazioni...

Andrea: – ...altre frazioni equivalenti, basta moltiplicare per...

Alberto: – per 3, per 4. Ad esempio, se moltiplichiamo per 3, 5/11 → 15/33 e 6/11 → 18/33. Nel mezzo ora ce ne sono due, 16/33 e 17/33!
Tutte/i: – La "morale" di questo problema è che fra due frazioni ce ne sono sempre infinite!

Alberto: – Mi viene in mente la geometria: anche fra due punti vicini vicini ci sono sempre infiniti punti!

Abbiamo così parlato di densità dei razionali. La volta successiva ho chiesto loro di scrivere che cosa aveva suscitato la discussione di questo problema... Ti riporto ciò che ha suscitato in Camilla: – Stupore. Stupore, sgomento. Stupore, sgomento, meraviglia... Questo problema mi ha lasciato a bocca aperta. Generalmente se penso a una cosa infinita penso a qualcosa di grandissimo. Infinito, appunto! Ma pensare a una cosa infinitamente piccola... Cioè, una cosa infinitamente grande è una cosa in continua espansione, e la posso "tollerare", ma una cosa che diventa sempre più piccola, prima o poi sparisce... o no?"

La lettera di Sandra Vannini continua. Ma urge qualche commento. Prima di tutto: finché la scuola potrà contare su insegnanti come lei (e su alunne/i come Camilla e compagne/i!) non ci sarà "morattizzazione" che tenga; la scuola continuerà a essere un territorio "caldo" e "civile", un luogo di comunicazione e di creatività. E poi: il racconto dell'esperienza conferma il ruolo importante dei problemi "belli" nello scatenare il confronto, la discussione, la costruzione collettiva di pensiero critico.

Ma ridiamo la parola all'interlocutrice del colonnello. "A proposito di problemi belli, mi vengono in mente (ispirati quasi sempre da proposte di Emma Castelnuovo):

- i problemi di isoperimetria e di equivalenza nel piano, la soluzione dei quali è spesso ricavata da un "modello" che poi conduce alla scoperta di curve (le coniche);

- i problemi di ottimizzazione di volume a parità di superficie (laterale o totale), che io chiamo i "problemi delle scatole";

- le aritmetiche finite (in quale ambiente sono state eseguite le seguenti operazioni?);

- ancora a proposito di frazioni, il "problema della formica", dove si riflette sull'esistenza di somme di infiniti termini il cui risultato non è infinito ...

Sì, penso che ce ne siano di problemi "belli", ma il trucco è di porli in maniera intrigante... i ragazzini (più sono piccoli, secondo me, più sono disponibili!) amano dire le loro opinioni, affermare le proprie idee, discutere."

Non c'è molto da aggiungere alla lettera di Sandra Vannini. Mi limiterò a un'osservazione. Nel curricolo "praticato", il principio gerarchico tra contenuti sotteso alle nostre scelte è dettato da una duplice istanza: quella del rilievo disciplinare (l'asse algebrico-analitico, senz'altro fondamentale nella matematica degli ultimi secoli, assunto come centrale dai programmi "reali" ancor più che dai programmi "nominali") e quella della tradizione didattica. È forse venuto il momento di considerare un'altra gerarchia, dettata dalla valenza formativa (trasversale, in primo luogo, e poi interna all'area disciplinare) di alcuni contenuti; la costruzione di questa seconda gerarchia potrà essere favorita, se non guidata, proprio dall'individuazione di alcuni problemi "belli" e cruciali, intorno a cui organizzare il percorso. Si scoprirà così che le due gerarchie – almeno per quanto riguarda la matematica – non coincidono affatto; il che ci costringerà, infine, a assumere piena consapevolezza delle scelte, anche contenutistiche, oltreché metodologiche, che andremo a praticare...